

Rezonanța în circuite electromagnetice RLC

Cuvinte cheie: oscilații forțate, oscilații amortizate, rezistență(R), capacitate (C), inductanță (L), reactanță inductivă (X_L), reactanță capacitivă (X_C), reactanță (X), impedanță(Z), defazaj($\Delta\varphi$), factor de calitate (Q), lărgime de bandă ($\Delta\omega$)

Comportamentul circuitului RLC este studiat și frecvențele de rezonanță ν_{rez} vor fi determinate practic, și apoi comparate cu valorile teoretice.

$$\nu_{rez} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (1)$$

Se analizează curbele de rezonanță măsurate și comportamentul impedanței a componentei LC. Se măsoară din curbele de rezonanță lărgimea de bandă $\Delta\omega$ și factorul de calitate Q , și vor fi comparate cu valorile teoretice obținute din parametrii electrici ai componentelor elementelor de circuit.

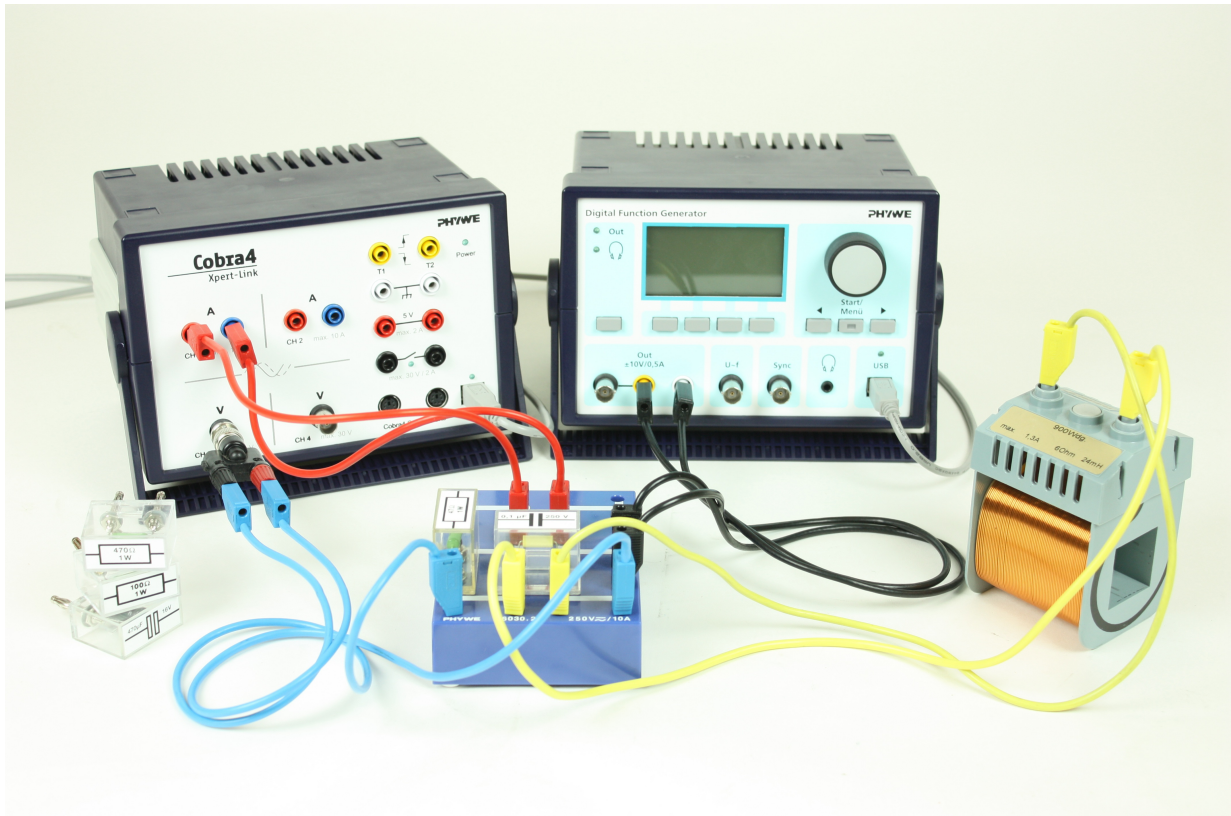


Figure 1: Montaj experimental (circuit paralel RLC)

Echipament

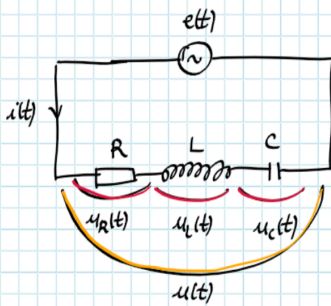
Cobra4 Xpert-Link	1
Generator de semnale digitale PHYWE, USB, incl. Cobra4 software	1
Bobină, 900 de spire	1
Set cabluri Cobra4 Xpert-Link	1
Machetă cu legături	1
Condensator 470 nF/ 250V, G1	1
Condensator 100nF/ 250V, G1	1
Rezistor 100 Ohmi, 1W, G1	1
Rezistor 47 Ohmi, 1W, G1	1
Rezistor 470 Ohmi, 1 W, G1	1
Software measureLab	1

Obiective

1. Măsurati căderea de tensiune U a componentei LC și curentul I care se stabilește prin circuit și determinați frecvența de rezonanță în ambele cazuri de combinare a bobinei și a condensatorului. (serie și paralel)
2. Determinați impedanța Z a componentei LC în ambele tipuri de circuite. (serie și paralel)
3. Determinați lărgimea de bandă B și factorul de calitate Q pentru ambele tipuri de circuite.

În cele ce urmează este prezentată o schiță cu noțiuni de liceu despre circuitul RLC.
Să ne reamintim!

Circuitul serie RLC



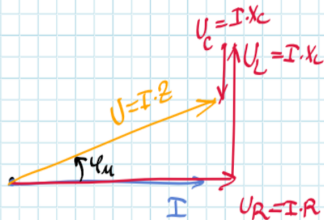
$$i(t) = I \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$u_R(t) = U_R \sin(\omega t + \varphi_0), U_R = IR$$

$$u_L(t) = U_L \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}), U_L = I \cdot X_L$$

$$u_C(t) = U_C \sin(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}), U_C = I \cdot X_C$$

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$



FAZORIAL: $\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C$

$$u(t) = U \sin(\omega t + \varphi_0 + \varphi_u)$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

$$I \cdot Z_s = \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2}$$

$$Z_s = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

impedanta serie RLC

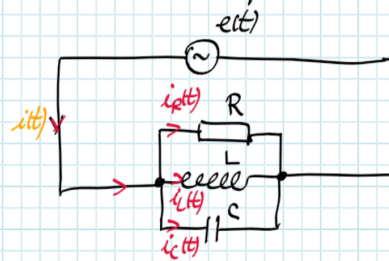
$$U = I \cdot Z_s$$

$$\tan \varphi_u = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

defazajul tensiune-curent

$$u(t) = I \cdot \underbrace{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}_U \sin(\omega t + \varphi_0 + \underbrace{\arctan \frac{X_L - X_C}{R}}_{\varphi_u})$$

Circuitul paralel RLC



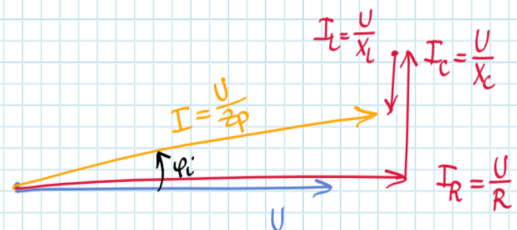
$$u_R(t) = u_L(t) = u_C(t) = u(t) = U \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$i_R(t) = I_R \sin(\omega t + \varphi_0), I_R = \frac{U}{R}$$

$$i_L(t) = I_L \sin(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}), I_L = \frac{U}{X_L}$$

$$i_C(t) = I_C \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}), I_C = \frac{U}{X_C}$$

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t)$$



FAZORIAL: $\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C$

$$i(t) = I \sin(\omega t + \varphi_0 + \varphi_i)$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$$

$$\frac{U}{Z_p} = \sqrt{\left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\frac{U}{X_C} - \frac{U}{X_L}\right)^2}$$

$$\frac{1}{Z_p} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}$$

$$I = \frac{U}{Z_p}$$

$$\tan \varphi_i = \frac{I_C - I_L}{I_R} = \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}}$$

impedanta paralel RLC

defazajul curent-tensiune

$$i(t) = U \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}}_I \sin(\omega t + \varphi_0 + \underbrace{\arctan \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}}}_{\varphi_i})$$

Teoria lucrării

Un circuit RLC (de asemenea numit circuit oscilant, sau circuit rezonator) constă dintr-un rezistor R , o inductanță (L) și un condensator (C) uneori fiind denumit ca circuit-LC, rezistorul fiind folosit pentru a simula pierderile rezistive dintr-un circuit real. În general, se disting două tipuri de circuite RLLC, circuitul serie și circuitul paralel. Diagramele celor două circuite sunt reprezentate mai jos:

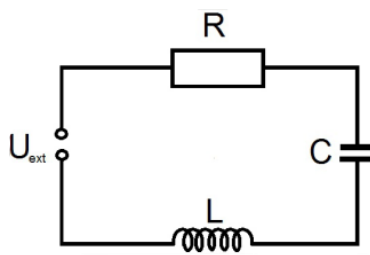


Figure 2: Diagrama circuit serie RLC

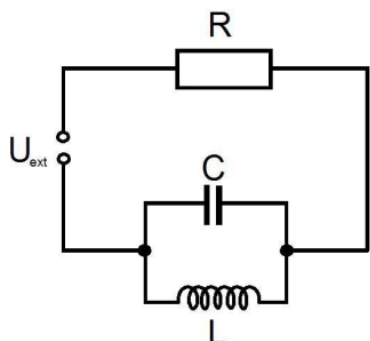


Figure 3: Diagrama circuit serie RLC

Când un condensator complet încărcat se descarcă printr-o bobină, descărcarea curentului din condensator induce un câmp magnetic în bobină, și acest curent atinge un maxim atunci când condensatorul este complet descărcat. Apoi, din cauza descreșterii curentului, schimbarea fluxului magnetic induce o tensiune care conform legii Lenz încarcă un condensator. Acum curentul scade la zero, până când condensatorul se încarcă complet din nou, dar invers, cu sarcini opuse acum pe armături. În acest moment, procedura începe din nou, dar cu un curent în sens opus. În absența unei rezistențe, această descărcare și încărcare ar oscila la nesfârșit, dar din cauza rezistenței ohmice, de care fiecare circuit are parte, oscilația este amortizată și amplitudinea curentului și a tensiunii scad în timp.

Circuit serie RLC

Conforma legii lui Kirchhoff tensiunea totală într-un ochi de rețea trebuie să fie egală cu zero sau să fie egală cu tensiunea electromotoare. Pentru circuitul serie RLC, putem deci scrie:

$$U_L + U_C + U_R = U_{ext}$$

- $U_L = L \frac{d}{dt} I$ – căderea de tensiune de la bornele bobinei
- $U_C = \frac{Q}{C}$ – căderea de tensiune de la bornele condensatorului
- $U_R = RI$ – căderea de tensiune de la bornele rezistorului
- $U_{ext} = U_{generator} = U_0 \cdot e^{i\omega t}$ – tensiune externă dată de generator

Folosind aceste identități și diferențiând în raport cu timpul, și folosind relația $\frac{d}{dt} Q = I$:

$$L \frac{d^2}{dt^2} I + R \frac{d}{dt} I + \frac{1}{C} I = i\omega U_0 \cdot e^{i\omega t}$$

Această ecuație poate fi ușor rescrisă ca o ecuație diferențială de ordinul II neomogenă analoagă unei oscilații mecanice forțate. Folosind formula lui Euler, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ și coeficientul de amortizare $\delta = \frac{R}{2L}$ se obține:

$$\ddot{I} + 2\delta \dot{I} + \omega_0^2 I = \frac{\omega}{L} U_0 \cdot e^{i(\omega t + \pi/2)}$$

Partea reală a soluției este curentul oscilant:

$$I = I_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C}))^2}}$$

Defazaajul curentului I față de $U_{ext} = U_{generator}$ este dat de:

$$\tan \phi = -\frac{1}{R} (X_L - X_C)$$

Curentul I este maxim, transferul de energie de la generator la componentele RLC este maxim, pentru pulsația generatorului excitator:

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Valoarea impedenței echivalente este definită de $Z = \frac{U_{efectiv}}{I_{efectiv}}$ Pentru circuitul serie LC, impedența serie este:

$$Z_s = X_L - X_C$$

$$Z_s = \left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right|$$

În scrierea lui Z_s se folosește modulul pentru că impedanțele și reactanțele inductive și capacitive sunt numere complexe.

Comparând cu situația analoagă a unei oscilații mecanice forțate, aici frecvența de rezonanță este independentă de amortizări, După cum se poate vedea în formula curentului I și în formula defazajului Φ , la rezonanță defazajul devine zero în toate componentele circuitului.

Circuit paralel RLC

În circuitul paralel RLC, aplicăm prima legea Kirchhoff în nodul de rețea:

$$I_R + I_L + I_C = 0$$

- $U = L \frac{d}{dt} I_L$ – intensitatea curentului prin bobină
- $U = \frac{Q}{C}$, $C = \frac{dQ}{dU}$, $I_C = \frac{dQ}{dt}$ – intensitatea curentului prin condensator
- $U = RI_R$ – intensitatea curentului prin rezistor
- $U_{ext} = U_{generator} = U_0 \cdot e^{i\omega t}$ – tensiune externă dată de generator

De data aceasta tensiunea la bornele componentelor R,L,C și generatorului este aceeași. Ceea ce variază sunt curenții. Rescriem legea Kirchhoff I:

$$\ddot{U} + \frac{1}{RC}\dot{U} + \frac{1}{LC}U = 0$$

Folosind $U(t) = U_0 \cdot \exp(i\omega t)$ și după eliminarea părții imaginare se obține frecvența de rezonanță $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Pentru determinarea impedanței, $Z = \frac{U_{efectiv}}{I_{efectiv}}$, cu $I(t) = \frac{U(t)}{Z}$ și $I_R = I$ rescriem legea Kirchhoff I:

$$\frac{U(t)}{Z_P} = \frac{U(t)}{X_L} + \frac{U(t)}{X_C} \Rightarrow \frac{1}{Z_p} = \left| \frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C} \right|$$

Aplicând legea Kirchhoff I pe întreg circuitul și tratând componenta LC ca o componentă unitară, obținem:

$$U_{ext} = U_R + U_{LC}$$

$$U_0 \cdot e^{i\omega t} = RI + Z_{LC}I$$

$$Z_{LC} = Z_p$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\frac{\omega L}{1 - \omega/\omega_0})^2}}$$

Defazajul curentului $I(t)$ față de tensiunea generatorului U_{ext} este:

$$\tan \phi = \frac{1}{R(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C})}$$

Comparând calculele din cele două cazuri, rezultatele sunt:

În ambele cazuri (circuit serie și circuit paralel) avem aceeași frecvență de rezonanță:

$$\nu_{rez} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

În circuitul serie, impedanța tinde la zero când frecvența generatorului se apropie de frecvența de rezonanță, care duce la creșterea curentului în circuit. În circuitul paralel, impedanța circuitului LC crește atunci când frecvența generatorului se apropie de frecvența de rezonanță, lucru care poate fi văzut în descreșterea curentului.

Alte cantități fizice, care descriu comportamentul de rezonanță al sistemelor sunt **lărgimea de bandă** B și **factorul de calitate** Q . Lărgimea de bandă a curbei de rezonanță se definește ca distanța dintre două puncte în care amplitudinea $A_{max} = A_{rez}$ scade până la valoarea $\frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$ (Fig.4)

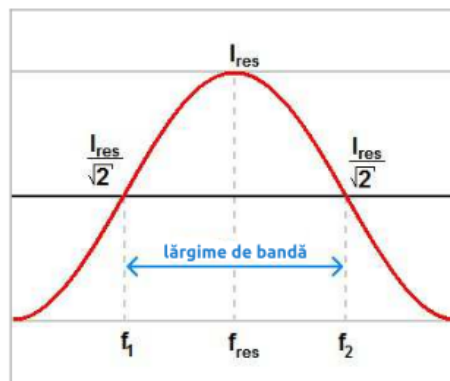


Figure 4: Definiția lărgimii de bandă

Factorul de calitate Q este dat de:

$$Q = \frac{\nu_{rez}}{B}$$

În circuitul serie, factorul de calitate poate fi exprimat ca:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{L}{C}\right)}$$

și poate fi obținut din ecuații (dar de obicei se folosește relația $B = 2\delta$, unde δ este coeficientul de amortizare, care furnizează o cale mai ușoară și mai rapidă pentru a obține Q)

Se poate observa că rezistorul de asemenea este responsabil pentru forma curbei de rezonanță.

În circuitul paralel, factorul de calitate, este exprimat prin parametrii electrici ai componentelor de circuit astfel:

$$Q = R \sqrt{\left(\frac{C}{L}\right)}$$

Montaj și mod de lucru

Realizați montajele experimentale, pentru măsurarea tensiunii și curentului în circuitul serie și paralel, care sunt prezentate în figurile de mai jos. R_i reprezintă rezistența internă a generatorului, care conform descrierii tehnice are 2Ω

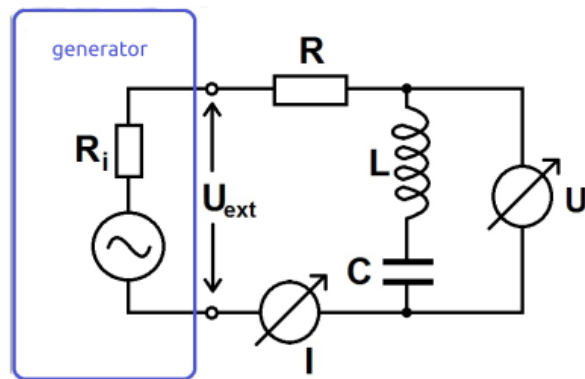


Figure 5: Diagrama montajului serie LC

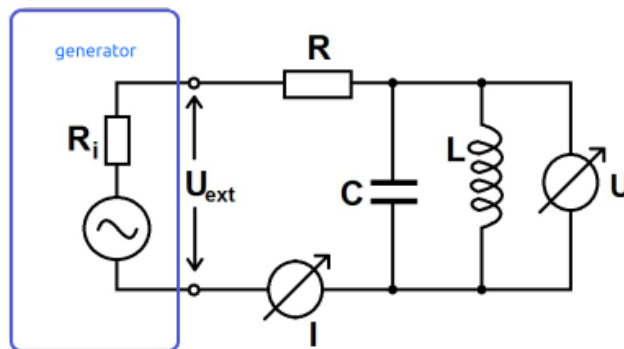


Figure 6: Diagrama montajului paralel LC

La început, configurați echipamentul pentru circuitul serie RLC. Începeți cu o combinație de elemente de circuit: condensator de $0,47\mu F$ și $R = 470\Omega$. Folosiți canalul CH1 al unității *Xpert-Link* pentru măsurarea curentului și canalul CH3 pentru măsurarea tensiunii.

Conectați unitatea *Xpert-Link* și funcția de generare de semnale la calculator.

Porniți aplicația software "measureLAB", și alegeți experimentul din ecranul de pornire (alegeți "PHYWE experiments", căutați "P2440664", și faceți click pe fișierele care conțin acest experiment). Toate presetările necesare se vor încărca.

Dacă doriți să ve definiți propriile setări, apăsați pe butonul cu roata dințată, alegeți "Sensors/Channels") și selectați "Xpert-Link" canalul CH1. Domeniul de măsurare trebuie să fie setat la 10mA, și pentru a obține valori efective,"TRMS" (True Root Mean Squar, adică o mediere pe un interval de frecvențe a valorii măsurate) trebuie selectat. Folosiți setările care sunt oferite în caseta de ansamblu de setări, prezentată mai jos. Pentru primul experiment, este necesar o rampă de frecvențe de la 1200 Hz până la 2000Hz (cu pasul de 5Hz). O rată de eșantionare de 1KHz este suficientă. Când încărcați experimentul cu presetări, puteți începe fără să mai faceți din noi setările. Rampa de frecvențe poate fi micită pentru cazurile cu alte valori pentru capacități ale condensatorului diferite. Fiecare montaj are setările lui corespunzătoare în ceea ce privește frecvențele genetaroului, trebuie aleasă rampa potrivită de frecvențe.

Parametrii de configurare (primul experiment $C= 0,47\mu F$, $R = 470\Omega$):

CH1: 10mA, Average 1 value, TRMS activ

CH3: 10V, Average 1 value,TRMS activ

Generatorul de frecvențe (ieșirea sursei): rampă de frecvențe 1200Hz - 2000Hz, pas de 5Hz, timp de pauză 200ms

Formă de ieșire: rampă liniară

Forma semnalului: sinusoidal, amplitudinea pp. 5V, Offset 0V

Rată de eșantionare:1 KHz

Înainte începerii experimentului , este importantă înțelegerea modului în care măsurătoarea TRMS funcționează, pentru a regla setările funcției digitale a generatorului. Un convertor TRMS care transformă semnalul în valori efective, cere un anume interval de timp pentru această operație pentru a oferi valori de încredere.

Convertorul va oferi doar valori TRMS precise, dacă intervalul de timp a trecut până ce semnalul este modulat din nou! În cazul Xpert-Linkului, timpul de conversie este de 200ms. Din cauza asta pauza de timp corespunzătoare pasului rămpii de frecvențe nu ar trebui să fie sub acest interval!

Când măsurăm curbele de rezonanță trebuie să descreștem pasul de frecvențe, pentru că această cantitate ține seama de variațiile semnalului. (alegând valori mai mari pentru pas rezultă într-o curbă în "trepte"). Este recomandat să fie ales un increment mare (5Hz sau 10Hz) pentru o curbă de întindere mari, și un un increment mic (1Hz sau 2Hz) pentru o curbă de întinderi mici. Atenție. Alegerea unui increment prea mic va duce la un timp de așteptare mare.

Atenție la faptul că domeniul de măsurare a intensității curentului cu ajutorul unității Xpert-Link. Domeniul trebuie mărit până la 100 mA când folosim rezistențe mici, pentru că rezistorul va limita curentul în circuit.

Pentru măsurarea impedanței poate fi folosit un canal de calcul teoretic virtual. Când sunt încărcate presetările, este predefinit un canal "impedanță" care calculează raportul măsurătorilor CH3/CH1 ca o funcție de frecvență.

Dacă doriți definirea unui canal virtual propriu, faceți click pe $\sqrt{a}$ din meniu, apoi faceți click pe "+" și se vor deschide setările. Acest meniu permite definirea de noi canale virtuale, fiind posibilă setarea numerică a mărimilor de intrare, denumirea mărimilor, definirea unei formulei de calcul de ieșire. Printr-un click pe simbolurile sau prin glisarea acestora, canalele pot fi aduse într-o formulă de calcul. Pot fi folosite operații aritmetice sau funcții trigonometrice, și dacă parantezele nu sunt închise corespunzător se va activa un cadru roșu indicând faptul că trebuie să scrieți corect formula de intrare înaintea pornirii măsurătorii.

În timpul experimentului, vă veți dori să ștergeți vechile măsurători. Pentru a face acest lucru, faceți click pe simbolul 'x'. Puteți exporta datele din meniul 'Data Pool' și puteți le puteți descărca apăsând butonul 'Download'.

Pe lângă definirea canalului virtual, se adaugă un canal de frecvențe, canalul CH1 pentru măsurarea intensității din circuit, și canalul CH3 pentru măsurarea tensiunii la bornele componentelor RLC.

Pornirea unei măsurări pentru canalele definite, se face apăsând butonul 'Record'. Măsurătoarea se va opri automat după ce rampa de frecvențe va fi parcursă pas cu pas. Rezultatul va apărea asemănător ca în figura de mai jos:

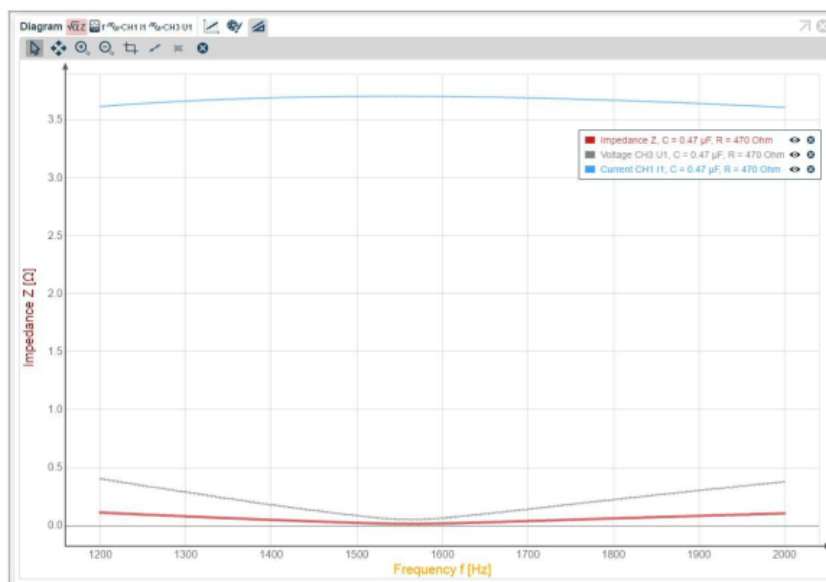


Figure 7: Circuit serie RLC. Date experimentale

Dacă doriți folosirea unei scale logatimice în reprezentarea datelor, faceți click pe "display" din diagramă și alegeți "Log" pentru axa y.

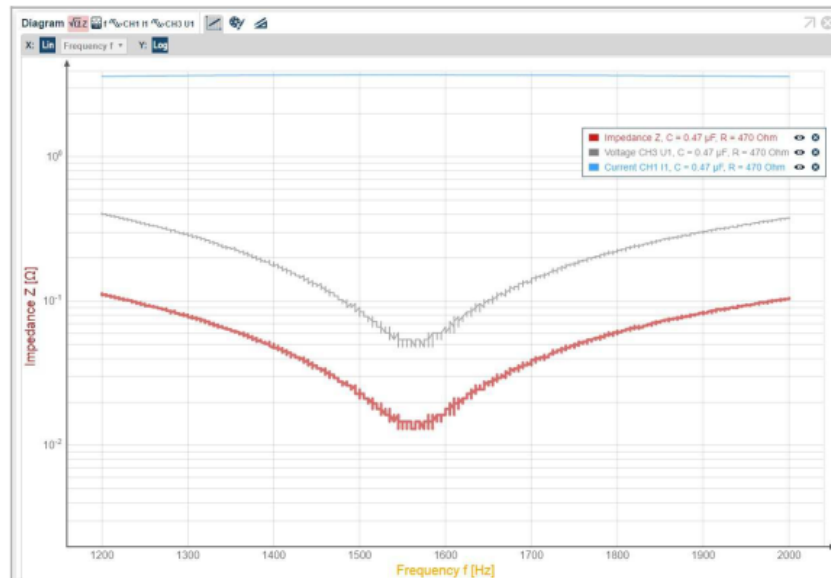


Figure 8: Circuit serie RLC. Reprezentare logaritmică a datelor experimentale

Acum alegeți alt condensator și o altă rezistență și măsurați curentul în funcție de frecvență. Veți avea nevoie de aceste date pentru calcularea *lărgimii de bandă*, B. Rezultatul ar trebui să arate similar cu:

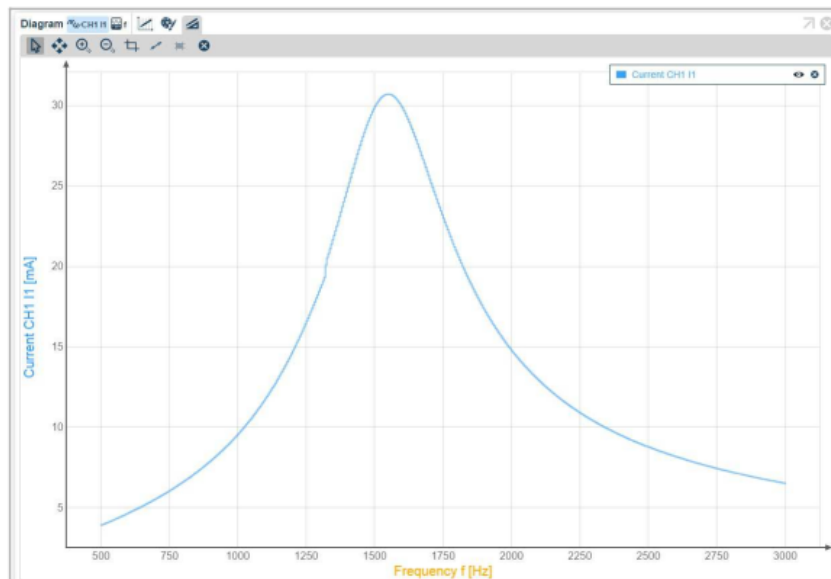


Figure 9: Intensitatea în circuitul serie RLC ($C = 0,47\mu F$, $R = 47$ Ohmi)

Folosiți această măsurare pentru a determina atât frecvența de rezonanță ν_{rez} cât și lărgimea de bandă B din graficul intensității curentului. În măsurătoarea de față lărgimea de bandă este de 428 Hz și corespunde unei frecvențe de rezonanță de 1550 Hz (vezi figura de mai jos).

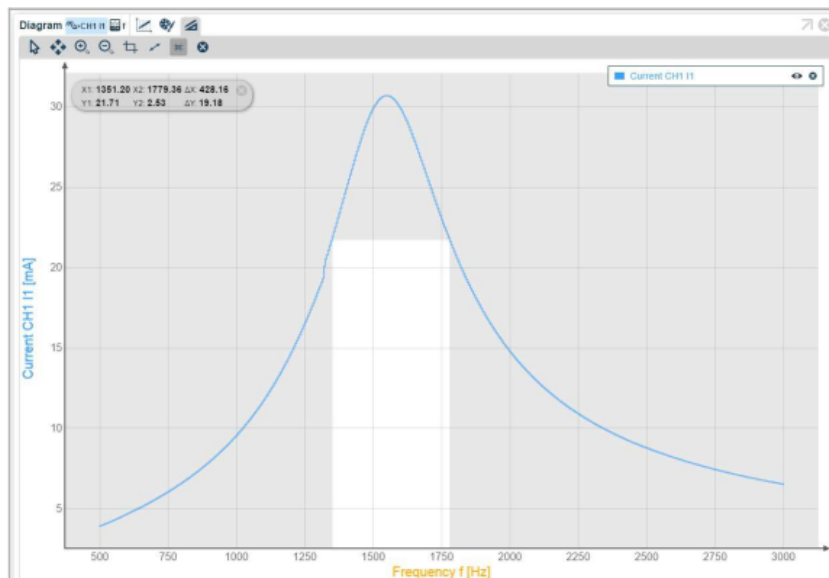


Figure 10: Circuit serie RLC: Determinarea lărgimii de bandă și folosirea uneltelor de calcul

Apoi schimbați condensatorul și repetați măsurarea impedanței pentru toate condensatoarele care sunt furnizate cu acest experiment. Rampa de frecvențe trebuie aleasă corespunzător fiecărei frecvențe de rezonanță, altfel trebuind să așteptăm un interval de timp îndelungat. Puteți relua măsurarea cu un pas mai mic pentru o rampă de frecvențe mai îngustă, pentru a măsura mai precis frecvența de rezonanță.

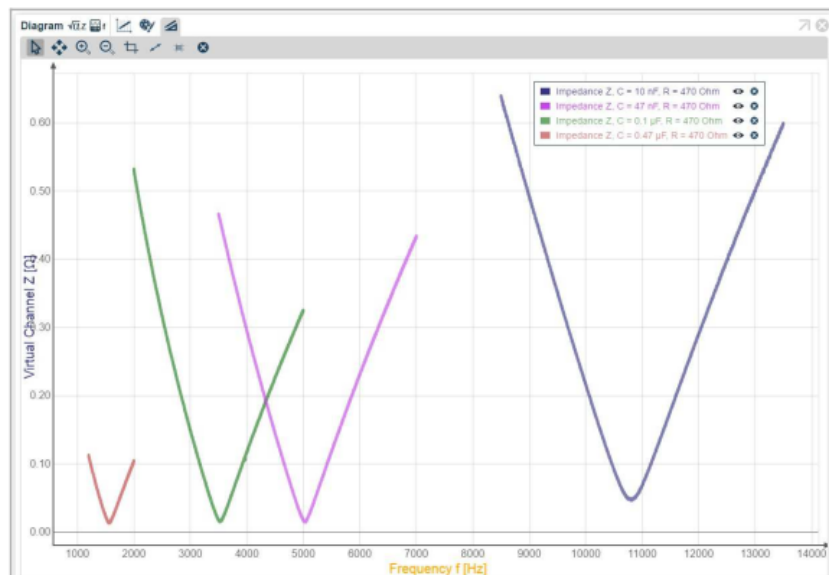


Figure 11: Circuit serie RLC - impedante pentru diferite condensatoare

Observați cum pozițiile vârfurilor se deplasează în funcție de ce condensatori folosim. Condensatoarele sunt componente al căror comportament se schimbă odată cu frecvența! Dacă veți folosi aceeași rezistență pentru circuitele serie și paralel, puteți compara direct frecvența de rezonanță pentru ambele cazuri. Pentru claritate, puteți reprezenta datele pe o scară logaritmică.

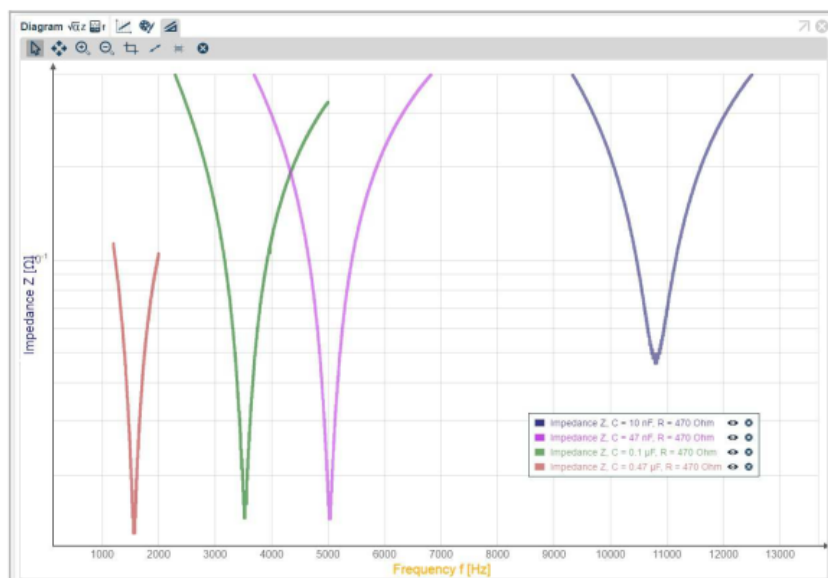


Figure 12: Circuit serie RLC cu $R=\text{const}$, condensatori diferiți (scala logarimică)

Cu ajutorul cursorului determinați frecvența de rezonanță. Se poate folosi roțița mouseului pentru zoom.

Realizați montajul RLC paralel. Începeți cu $C = 0,47\mu F$ și $R = 470\Omega$ sau oricare altă combinație de componente dorită, pe care doriți să o investigați. În diagramă, ca grafic, aveți din nou, canalul virtual, canalul de frecvență din partea sursei, și canalele care joacă rol de ampermetru și voltmetru.

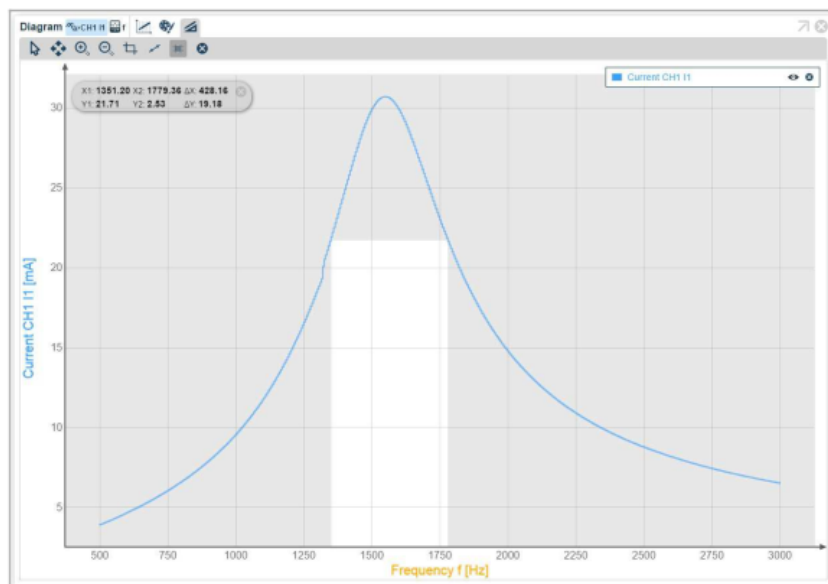


Figure 13: Circuit paralel RLC, $C=0,47\mu F$, $R=470\Omega$

Folosiți această măsurare pentru a determina atât frecvența de rezonanță ν_{rez} cât și lărgimea de bandă B din graficul intensității curentului. În măsurătoarea de față lărgimea de bandă este de 605 Hz și corespunde unei frecvențe de rezonanță de 1588 Hz (vezi figura de mai jos).

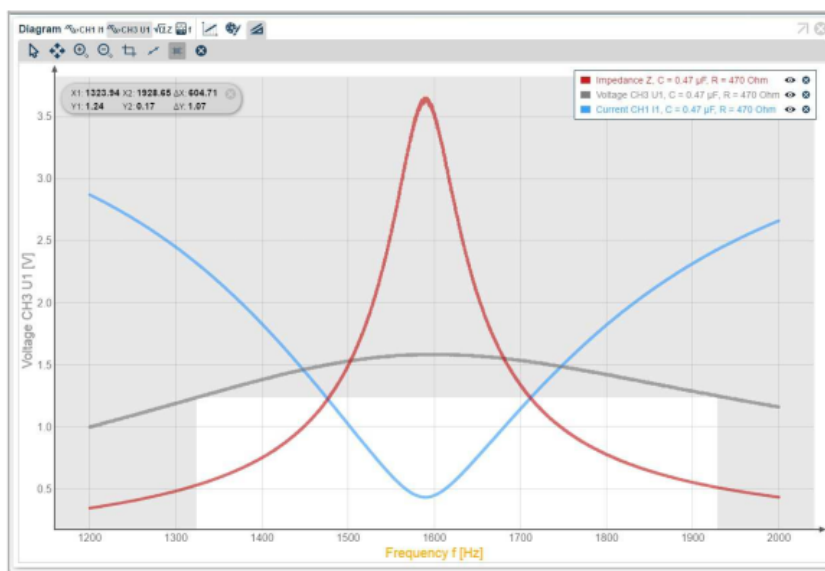


Figure 14: Circuit paralel RLC. Calcularea lărgimii de bandă

Apoi schimbați condensatorul și repetați măsurarea impedanței pentru toate condensatoarele care sunt furnizate cu acest experiment. Rampa de frecvențe trebuie aleasă corespunzător fiecărei frecvențe de rezonanță, altfel trebuind să așteptăm un interval de timp îndelungat.

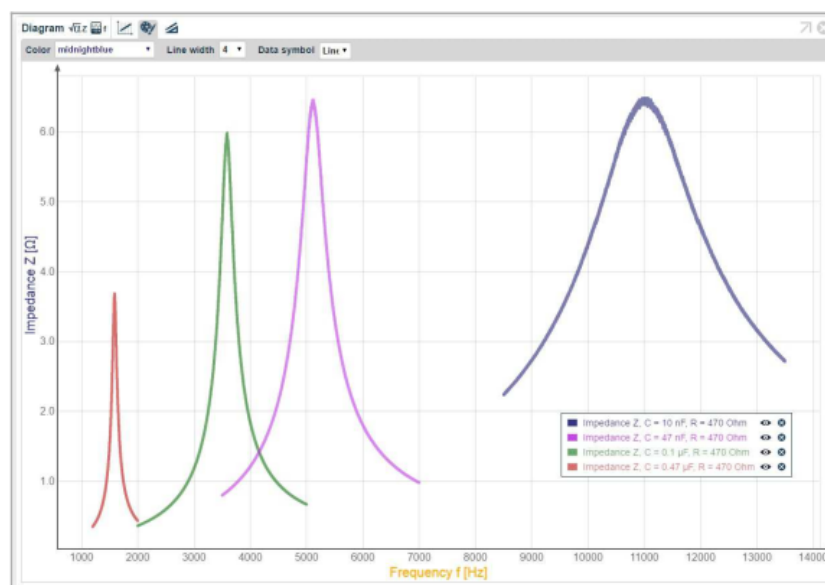


Figure 15: Circuit paralel RLC, $R=\text{const}$, diferiți condensatori

Observați cum pozițiile vârfurilor se deplasează în funcție de ce condensatori folosim. Condensatoarele sunt componente al căror comportament se schimbă odată cu frecvența! Dacă veți folosi aceeași rezistență pentru circuitele serie și paralel, puteți compara direct frecvența de rezonanță pentru ambele cazuri.

Apoi, alegeți un condensator care va fi folosit pentru mai multe rezistențe diferite. Rezultatul poate arăta astfel:

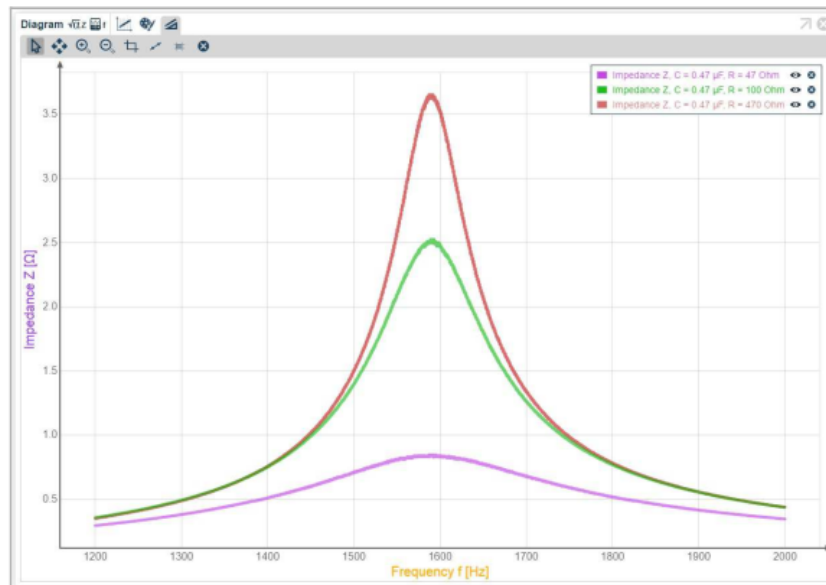


Figure 16: Circuit paralel RLC: diferite rezistențe, $C = \text{const.}$

Observați cum pozițiile vârfurilor nu depind de valorile rezistențelor. Rezistoarele sunt componente care nu depind de frecvența curentului care trece prin ele! (Se găsește același comportament dacă folosim un circuit serie)

Puteți de asemenea investiga influența bobinei, folosind o bobină cu mai multe spire.